

Ellipszis adott meredekségű érintőiről

Az [1] műben találtunk egy érdekes feladatot. Most erről lesz szó.

A feladat

Határozzuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

egyenletű ellipszishez azokat az érintőket, melyek párhuzamosak az

$$y = k \cdot x \quad (2)$$

egyenessel!

A megoldás

Bármely egyenes, amely párhuzamos (2) - vel, ilyen egyenletű:

$$y = k \cdot x + c . \quad (3)$$

Határozzuk meg ezen egyenes metszéspontjait az (1) ellipszissel!

Ehhez (3) - at (1) - be helyettesítjük:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(k \cdot x + c)^2}{b^2} &= 1 , \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \cdot (k^2 \cdot x^2 + 2 \cdot k \cdot c \cdot x + c^2) &= 1 , \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2 \cdot x^2}{b^2} + 2 \cdot \frac{k \cdot c}{b^2} \cdot x + \frac{c^2}{b^2} &= 1 , \\ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \cdot x^2 + \left(2 \cdot \frac{k \cdot c}{b^2} \right) \cdot x + \left(\frac{c^2}{b^2} - 1 \right) &= 0 . \end{aligned} \quad (4)$$

Ezt a másodfokú egyenletet a megoldóképlettel x - re megoldva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2 \cdot \frac{k \cdot c}{b^2} \pm \sqrt{\left(2 \cdot \frac{k \cdot c}{b^2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right)}}{2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)} = \frac{-\frac{k \cdot c}{b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{k \cdot c}{b^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right)}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} , \text{ tehát:} \\ x_{1,2} &= \frac{-\frac{k \cdot c}{b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{k \cdot c}{b^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right)}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} . \end{aligned} \quad (5)$$

Mivel az érintő **1** pontban érintkezik az ellipszissel, így (5) akkor ad **1** megoldást, ha a diszkrimináns zérus lesz, azaz:

$$D = \left(\frac{k \cdot c}{b^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \cdot \left(\frac{c^2}{b^2} - 1 \right) = 0 . \quad (6)$$

Ebből:

$$\begin{aligned} \frac{k^2 \cdot c^2}{b^4} &= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \cdot \left(\frac{c^2}{b^2} - 1 \right) = \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{c^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{k^2}{b^2} \cdot \left(\frac{c^2}{b^2} - 1 \right) , \\ \frac{k^2 \cdot c^2}{b^4} &= \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{c^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{k^2 \cdot c^2}{b^4} - \frac{k^2}{b^2} , \\ \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{c^2}{b^2} - 1 \right) &= \frac{k^2}{b^2} \rightarrow \frac{a^2 \cdot k^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} - 1 \rightarrow \left(1 + \frac{a^2 \cdot k^2}{b^2} \right) \cdot b^2 = c^2 \rightarrow c^2 = b^2 + a^2 \cdot k^2 \rightarrow \\ c_{1,2} &= \pm \sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2} . \end{aligned} \quad (7)$$

Most (3) és (7) - tel a keresett egyenesek egyenletei:

$$\underline{\underline{y_{1,2} = k \cdot x \pm \sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}}} . \quad (8)$$

Az érintési pontok abszcisszái (5) és (6) - ből:

$$\begin{aligned} x_{0;1,2} &= \frac{-\frac{k \cdot c_{1,2}}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} = -\frac{k \cdot c_{1,2}}{\frac{b^2}{a^2} + k^2} = -\frac{k \cdot a^2}{b^2 + k^2 \cdot a^2} \cdot c_{1,2} = \mp \frac{k \cdot a^2}{k^2 \cdot a^2 + b^2} \cdot \sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2} \rightarrow \\ x_{0;1,2} &= \pm \frac{k \cdot a^2}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} . \end{aligned} \quad (9)$$

SZÁMPÉLDA

Adatok:

$$a = 5 \text{ (cm) } ; b = 3 \text{ (cm) } ; k = \frac{1}{2} . \quad (A)$$

Az ellipszis egyenlete, (1) és (A) - val:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 ; \quad (a)$$

az $y = \frac{1}{2} x$ - szel párhuzamos egyenesek egyenlete, (8) és (A) - val:

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot x \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 5^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \cdot x \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \frac{1}{2} \cdot x \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{25 + 4 \cdot 9} = \frac{1}{2} \cdot (x \pm \sqrt{61}) ,$$

tehát:

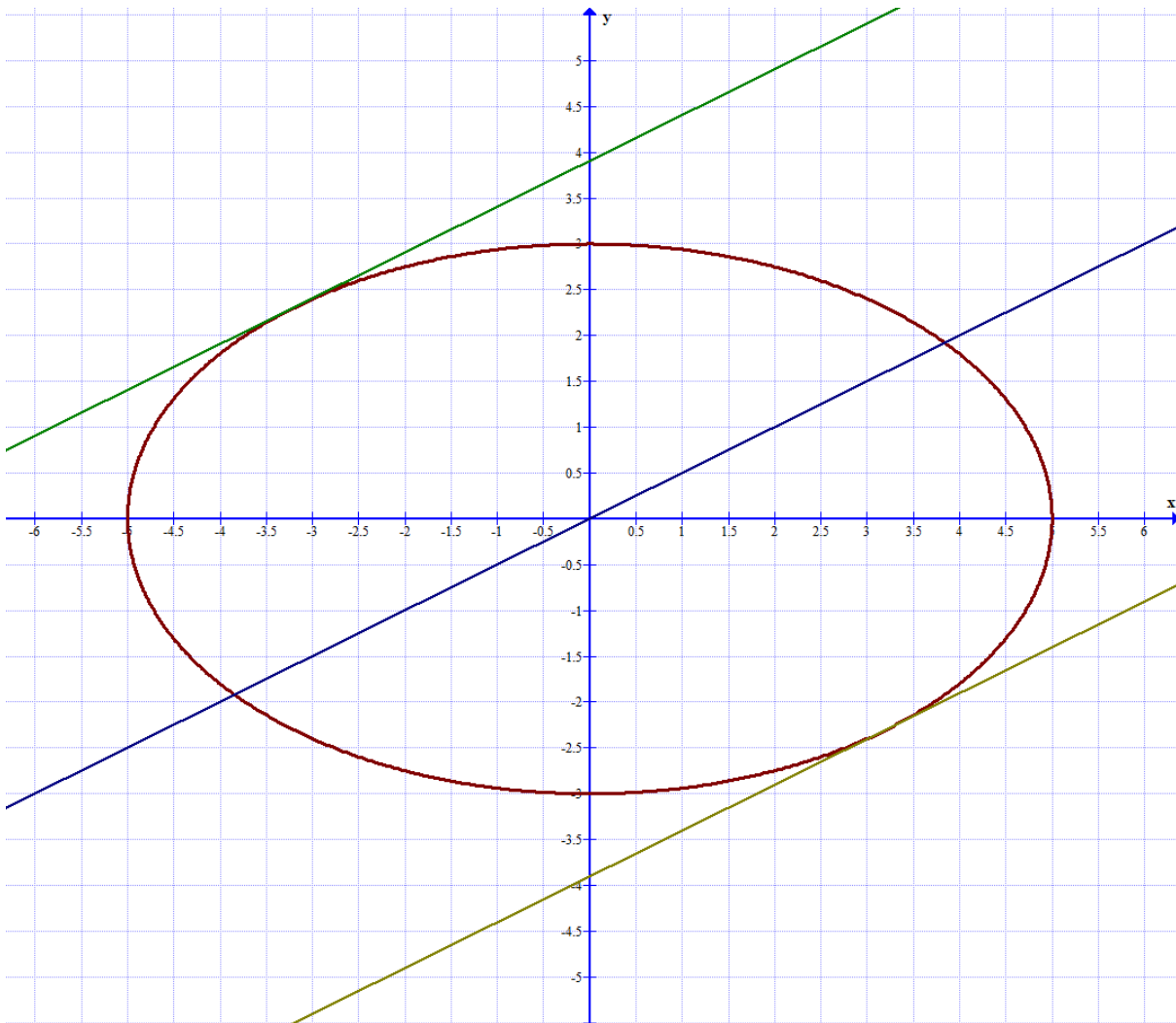
$$\underline{y_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (x \pm \sqrt{61}) \text{ (cm)}} . \quad (\text{b})$$

Az érintési pontok abszcisszái (9) és (A) - val:

$$x_{0;1,2} = \pm \frac{\frac{1}{2} \cdot 5^2}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 5^2 + 3^2}} = \pm \frac{\frac{1}{2} \cdot 5^2}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5^2 + 4 \cdot 3^2}} = \pm \frac{25}{\sqrt{25 + 36}} = \pm \frac{25}{\sqrt{61}} = \pm 3,20092 , \text{ tehát:}$$

$$\underline{x_{0;1,2} = \pm 3,20092 \text{ (cm)}} . \quad (\text{c})$$

Az eredményt az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Megjegyzések:

M1. A koordináták mértékegységét csak a végén írtuk ki (b) - nél és (c) - nél.

M2. Amikor arról beszélünk, hogy **1** megoldás legyen, akkor arra gondolunk, hogy egy egyenes az ellipszist **2** pontban metszheti, de azt az esetet keressük, amikor a **2** metszés - pont egybeesik. Miközben két, egymással párhuzamos egyenesünk van, annak (9) szerinti két érintési pont abszcisszájával, illetve (8) szerinti két egyenletével.

M3. Az érintési pontok koordinátáira, az 1. ábra alapján, (8) és (9) - et pontosítva:

$$x_{0,1} = + \frac{k \cdot a^2}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} , \quad y_{0,1} = k \cdot x_{0,1} - \sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2} ,$$

$$x_{0,2} = - \frac{k \cdot a^2}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} , \quad y_{0,2} = k \cdot x_{0,2} + \sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2} ;$$

azaz:

$$x_{0,1} = + \frac{k \cdot a^2}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} , \quad y_{0,1} = \frac{k^2 \cdot a^2}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} - \sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2} = \frac{k^2 \cdot a^2 - (k^2 \cdot a^2 + b^2)}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} \rightarrow$$

$$x_{0,1} = + \frac{k \cdot a^2}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} , \quad y_{0,1} = - \frac{b^2}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} ; \quad (10 / 1)$$

és:

$$x_{0,2} = - \frac{k \cdot a^2}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} , \quad y_{0,2} = - \frac{k^2 \cdot a^2}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} + \sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2} = \frac{-k^2 \cdot a^2 + (k^2 \cdot a^2 + b^2)}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} \rightarrow$$

$$x_{0,2} = - \frac{k \cdot a^2}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} , \quad y_{0,2} = \frac{b^2}{\sqrt{k^2 \cdot a^2 + b^2}} . \quad (10 / 2)$$

A számpélda adataival:

$$x_{0,1} = + 3,20092 \text{ (cm) } , \quad y_{0,1} = - 2,30466 \text{ (cm) } ; \quad (d / 1)$$

$$x_{0,2} = - 3,20092 \text{ (cm) } , \quad y_{0,2} = + 2,30466 \text{ (cm) } . \quad (d / 2)$$

M4. Az ellipszis középpontosan (is) szimmetrikus alakzat, így előre tudni lehet, hogy $k > 0$ - hoz – 1. ábra – :

$$x_{0,1} > 0 , \quad y_{0,1} < 0 ; \quad x_{0,2} < 0 , \quad y_{0,2} > 0 . \quad (11)$$

M5. Egy témájában hasonló írást találhat az érdeklődő Olvasó *) - ban. Ha ott ismerős képletekre bukkan, az nem a véletlen műve.

Ajánlott olvasmány:

*) – [Egyenes es ellipszis érintkezéséről.pdf](#)

Irodalom:

[1] – **A. V. Pogorjelov**: Geometrija
„Nauka”, Moszkva, 1983.

Összeállította: ***Galgóczy Gyula***
ny. mérnökstanár

Szódliget, 2025. 01. 20.

Továbbiak: www.galgoczy.net